

RANTAI MARKOV

(MARKOV CHAIN)

2.1 Tujuan Praktikum

Rantai markov (*Markov Chain*) merupakan salah satu materi yang akan dipelajari dalam praktikum stokastik. Berikut ini terdapat beberapa tujuan yang akan dicapai oleh praktikan dalam mempelajari rantai markov, sebagai berikut:

1. Praktikan mengetahui konsep dasar rantai markov dan mampu mengidentifikasi masalah-masalah yang berhubungan dengan rantai markov.
2. Praktikan mengetahui notasi dan terminologi dalam rantai markov.
3. Praktikan mengetahui tahap-tahap penyelesaian dan menganalisa permasalahan rantai markov, baik dengan perhitungan manual dan pengolahan *software* .

2.2 Pendahuluan Rantai Markov

Dalam berbagai aspek kehidupan terdapat banyak sekali ketidakpastian, salah satunya yaitu dunia industri. Ketidakpastian kondisi ataupun kejadian dalam industri tentunya sangat berbahaya, karena akan berhubungan dengan banyak hal seperti permintaan, sumber daya, kapasitas perusahaan dan sebagainya. Hal-hal tersebut tentunya akan sangat mempengaruhi biaya yang akan diterima ataupun dikeluarkan. Berdasarkan hal tersebut maka diperlukanlah suatu metode yang dapat digunakan untuk dapat menjelaskan kondisi ketidak pastian tersebut secara matematis

sehingga dapat diselesaikan secara empiris. Hasil tersebut yang kemudian dapat digunakan sebagai pertimbangan dalam mengambil keputusan yang optimal.

Salah satu metode yang dapat digunakan dalam memodelkan kondisi-kondisi yang tidak pasti tersebut yaitu dengan rantai markov (*Markov Chain*). Rantai Markov (*Markov Chain*) pertama kali dikemukakan oleh Andrey A. Markov seorang matematikawan Rusia pada tahun 1906 dalam bentuk teori dan mulai diperkenalkan kepada masyarakat pada tahun 1907. Pada tahun 1913, A. A. Markov berhasil menerapkan temuannya untuk pertama kalinya untuk 20.000 pertama Pushkin huruf "*Eugene Onegin*".

2.3 Penerapan Rantai Markov

Teori Rantai Markov ini memiliki beberapa penerapan aplikasi. Namun bisa dikatakan penerapan teori ini sangatlah terbatas. Hal ini dikarenakan sulitnya menemukan masalah- masalah yang memenuhi semua syarat yang diperlukan untuk menerapkan teori Rantai Markov ini. Rantai Markov ini adalah probabilitas transisi yang menyebabkan probabilitas pergerakan perpindahan kondisi dalam sistem. Sedangkan kebanyakan masalah-masalah yang ada probabilitasnya bersifat konstan.

Walaupun begitu ada beberapa bidang di kehidupan sehari-hari yang masih dapat menerapkan Rantai Markov. Di antaranya adalah dalam bidang ekonomi (perpindahan pelanggan), ilmu pengetahuan (teknologi internet yang terdapat banyak link), dan juga permainan (ular tangga) dan kesehatan (perkembangan suatu penyakit).

2.4 Rantai Markov

Markov Chain merupakan proses acak di mana semua informasi tentang masa depan terkandung di dalam keadaan sekarang (yaitu orang tidak perlu memeriksa masa lalu untuk menentukan masa depan). Untuk lebih tepatnya, proses memiliki properti Markov, yang berarti bahwa bentuk ke depan hanya tergantung pada keadaan sekarang, dan tidak bergantung pada bentuk sebelumnya. Dengan kata lain, gambaran tentang keadaan sepenuhnya menangkap semua informasi yang dapat mempengaruhi masa depan dari proses evolusi. Suatu *Markov Chain* merupakan proses stokastik berarti bahwa semua transisi adalah probabilitas (ditentukan oleh kebetulan acak dan dengan demikian tidak dapat diprediksi secara detail, meskipun mungkin diprediksi dalam sifat statistik).

1. Sejarah Rantai Markov

Teori Rantai Markov pertama kali ditemukan oleh Andrey Andreyevich Markov pada tahun 1906. Ia adalah seorang matematikawan dari Rusia yang hidup pada tahun 1856 sampai tahun 1922. Ia merupakan murid dari Chebysev, seorang yang terkenal di dunia probabilitas karena rumus yang ditemukannya. Ia mengungkapkan teori bahwa suatu kejadian berikutnya tergantung hanya pada keadaan saat ini dan bukan pada kejadian masa lalu. Pada tahun 1913 ia menerapkan temuannya ini yang pertama kali untuk 20.000 pertama Pushkin huruf "Eugene Onegin".

Teori rantai markov tersebut kemudian dikembangkan dari sebuah generalisasi ke bentuk tak terbatas dalam ruang diskrit diberikan oleh Kolmogorov (1936). Rantai Markov terkait dengan gerakan Brown dan ergodic hipotesis, dua topik dalam fisika yang penting dalam tahun-tahun

awal abad ke-20, tetapi tampaknya Markov lebih fokus pada perluasan hukum bilangan besar dalam percobaan-percobaan.

2. Pengertian Rantai Markov

Menurut Siagian (2006), rantai markov adalah suatu metode yang mempelajari sifat-sifat suatu variabel pada masa sekarang yang didasarkan pada sifat-sifat masa lalu dalam usaha menaksir sifat-sifat variabel tersebut dimasa yang akan datang.

Menurut Tjutju (1992), rantai markov adalah suatu teknik matematika untuk peramalan perubahan pada variabel-variabel tertentu berdasarkan pengetahuan dari perubahan sebelumnya.

Menurut Subagyo, Asri dan Handoko rantai Markov (*Markov Chains*) adalah suatu teknik matematika yang biasa digunakan untuk melakukan pembuatan model (*modeling*) bermacam-macam sistem dan proses bisnis.

3. Syarat-syarat rantai markov

Terdapat beberapa syarat-syarat yang harus dipenuhi agar suatu sistem atau permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan rantai markov. Berikut merupakan syarat-syarat tersebut:

- a. Jumlah probabilitas transisi untuk suatu keadaan awal dari sistem sama dengan 1.
- b. Probabilitas-probabilitas tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
- c. Probabilitas transisi konstan sepanjang waktu.
- d. Kondisi merupakan kondisi yang independen sepanjang waktu.

4. Konsep Dasar Rantai Markov

Apabila suatu kejadian tertentu dari suatu rangkaian eksperimen tergantung dari beberapa kemungkinan kejadian, maka rangkaian eksperimen tersebut disebut Proses Stokastik.

Stochastic-Process Classification Examples

| <i>Time</i> <i>State</i> | <i>Continuous</i> | <i>Discrete</i> |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| <i>Continuous</i> | Analog signal | A to D converter |
| <i>Discrete</i> | Computer availability model | round-based network protocol model |

Sebuah rantai Markov adalah suatu urutan dari variabel-variabel acak X_1, X_2, X_3, \dots dengan sifat Markov yaitu, mengingat keadaan masa depan dan masa lalu keadaan yang independen, dengan kata lain:

$$\Pr(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n).$$

Nilai yang mungkin untuk membentuk X_i S disebut ruang keadaan rantai.

Markov Chain adalah sebuah Proses Markov dengan populasi yang diskrit (dapat dihitung) yang berada pada suatu *discrete state (position)* dan diizinkan utk berubah state pada *time discrete*. Berikut ini adalah beberapa macam variasi dari bentuk rantai markov:

- a. *Continuous Markov* memiliki indeks kontinu.
- b. Sisa rantai Markov homogen (rantai Markov stasioner) adalah proses di mana $\Pr(X_{n+1} = x | X_n = y) = \Pr(X_n = x | X_{n-1} = y)$ untuk semua n . Probabilitas transisi tidak tergantung dari n .

c. Sebuah rantai Markov orde m di mana m adalah terbatas,

$$\begin{aligned} & \Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1) \\ &= \Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_{n-m} = x_{n-m}) \text{ for } n > m \end{aligned}$$

Dengan kata lain, keadaan selanjutnya tergantung pada keadaan m selanjutnya. Sebuah rantai (Y_n) dari (X_n) yang memiliki 'klasik' Markov properti sebagai berikut: Biarkan $Y_n = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-m+1})$, yang memerintahkan m -tupel dari nilai-nilai X . Maka Y_n adalah sebuah rantai Markov dengan ruang keadaan S^m dan memiliki klasik properti Markov.

d. Sebuah aditif rantai Markov order m di mana m adalah terbatas adalah

$$\Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1) = \sum_{r=1}^m f(x_n, x_{n-r}, r)$$

untuk semua $n > m$.

Dalam penyelesaian masalah menggunakan rantai markov, terdapat beberapa status. Status-status yang digunakan dalam rantai markov adalah sebagai berikut:

a. *Reachable State*

Status j *reachable* dari status i apabila dalam rantai dapat terjadi transisi dari status i ke status j melalui sejumlah transisi berhingga; terdapat $n, 0 \leq n \leq \infty$, sehingga $P^{n}_{ij} > 0$

b. *Irreducible Chain*

Jika dalam suatu rantai Markov setiap status *reachable* dari setiap status lainnya, rantai tersebut adalah *irreducible*.

c. *Periodic State*

Suatu status i disebut *periodic* dengan peroda $d > 1$, jika $p^{n_{ii}} > 0$, hanya untuk $n = d, 2d, 3d, \dots$; sebaliknya jika $p^{n_{ii}} > 0$, hanya untuk $n = 1, 2, 3, \dots$ maka status tersebut disebut *aperiodic*.

d. *Probability of First Return*

Probabilitas kembali pertama kalinya ke status i terjadi dalam n transisi setelah meninggalkan i .

$$f_i^{(n)} = P[X_n = i, X_k \neq i \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i]$$

(note: $f_i^{(0)}$ didefinisikan = 1 untuk semua i)

e. *Probability of Ever Return*

Probabilitas akan kembalinya ke status i setelah sebelumnya meninggalkan i .

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}$$

f. *Transient State*

Suatu status disebut *transient* jika probabilitas $f_i < 1$; yaitu bahwa setelah dari i melalui sejumlah transisi terdapat kemungkinan tidak dapat kembali ke i .

g. *Recurrent State*

Suatu status disebut *recurrent* jika probabilitas $f_i = 1$; yaitu bahwa setelah dari i melalui sejumlah transisi selalu ada kemungkinan untuk kembali ke i .

h. *Mean Recurrent Time of State*

Untuk suatu status *recurrent*, jumlah step rata-rata untuk kembali ke status i

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$$

i. *Null Recurrent State*

Suatu *Recurrent State* disebut *recurrent null* jika $m_i = \infty$

j. *Positive Recurrent State*

Suatu *recurrent state* disebut *positive recurrent* atau *recurrent nonnull* jika $m_i < \infty$

k. *Communicate State*

Dua status, i dan j , dikatakan berkomunikasi jika i *reachable* dari j dan juga *reachable* dari i ; ditulis dengan notasi $i \leftrightarrow j$

l. *Ergodic*

Rantai Markov disebut *ergodic* jika, *irreducible*, *aperiodic*, dan seluruh status *positive recurrent*

LAB INDUSTRI LANJUT